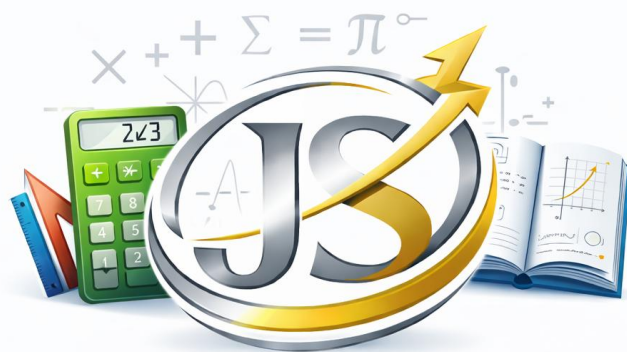




JOSECLER SILVA

— Prof. Josecler —

MATERIAL DE APOIO

FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA

Conceitos • gráficos • interpretação • exemplos

DISCIPLINA

Matemática Aplicada

PROFESSOR

Josecler Silva

Resumo para estudo e revisão — Ensino Médio

1. Ideia de função

Uma função é uma relação que associa cada valor de entrada x a um único valor de saída $y = f(x)$. Em um gráfico cartesiano, x aparece no eixo horizontal e $f(x)$ (ou y) no eixo vertical.

LEITURA RÁPIDA

Entrada → regra de formação → saída. Exemplo: na função $f(x) = 2x + 1$, se $x = 3$, então $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

2. Função afim (função polinomial do 1º grau)

A função afim é toda função que pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$, com a e b números reais. Quando $a \neq 0$, seu gráfico é uma reta não vertical.

$$f(x) = ax + b$$

$a = \text{coeficiente angular} \mid b = \text{coeficiente linear}$

O que significam os coeficientes?

- a — coeficiente angular: indica a inclinação da reta e como y varia quando x aumenta uma unidade.
- b — coeficiente linear: é o valor $f(0)$. Portanto, indica o ponto em que a reta intercepta o eixo y : $(0, b)$.

Classificação importante

Situação	Forma	Característica	Exemplo
Função afim	$f(x)=ax+b$	$a \neq 0$	$f(x)=2x+1$
Função linear	$f(x)=ax$	$b = 0$	$f(x)=-3x$
Função identidade	$f(x)=x$	$a = 1$ e $b = 0$	$f(x)=x$
Função constante	$f(x)=b$	$a = 0$	$f(x)=4$

3. Gráficos da função afim

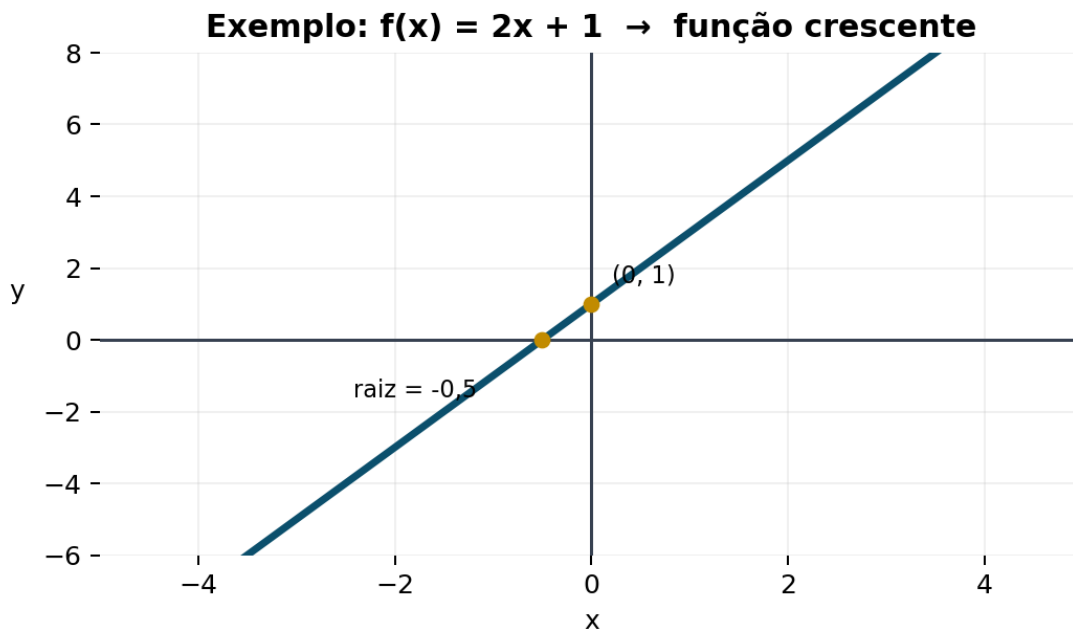
Para construir o gráfico de uma função afim, bastam dois pontos. Uma estratégia prática é encontrar o ponto no eixo y, fazendo $x = 0$, e a raiz (zero da função), fazendo $f(x) = 0$.

$$\text{Raiz da função afim: } x = -b/a$$

válida quando $a \neq 0$

Função crescente: $a > 0$

Quando a é positivo, a reta sobe da esquerda para a direita: à medida que x aumenta, os valores de $f(x)$ também aumentam.

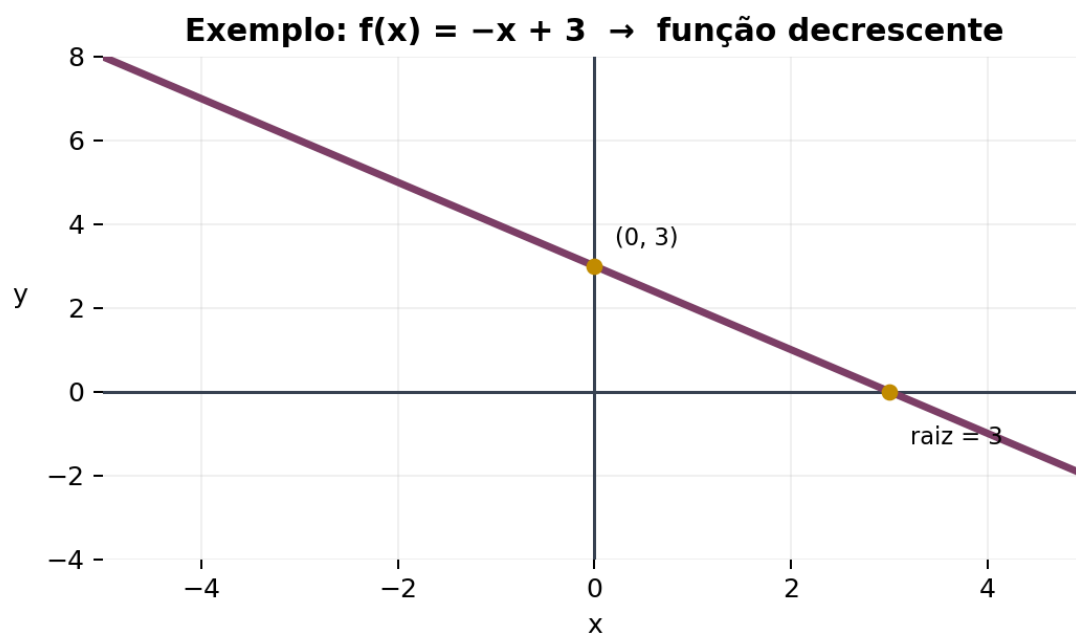


EXEMPLO RESOLVIDO

$f(x) = 2x + 1$. Intercepto em y: $f(0)=1 \rightarrow (0, 1)$. Raiz: $2x+1=0 \rightarrow x=-1/2=-0,5$. Como $a=2>0$, a função é crescente.

Função decrescente: $a < 0$

Quando a é negativo, a reta desce da esquerda para a direita: à medida que x aumenta, os valores de $f(x)$ diminuem.



EXEMPLO RESOLVIDO

$f(x) = -x + 3$. Intercepto em y: $(0, 3)$. Raiz: $-x + 3 = 0 \rightarrow x = 3$. Como $a = -1 < 0$, a função é decrescente.

4. Interpretando uma função afim em situações reais

Muitas situações apresentam uma parte fixa e outra que varia proporcionalmente. Esse comportamento pode ser modelado por uma função afim.

SITUAÇÃO-PROBLEMA

Uma corrida de aplicativo cobra R\$ 6,00 de taxa inicial e R\$ 2,50 por quilômetro rodado. O custo $C(x)$, em reais, para x quilômetros pode ser modelado por $C(x)=2,5x+6$.

- Coeficiente $a = 2,5$: a cada 1 km acrescentado, o preço aumenta R\$ 2,50.
- Coeficiente $b = 6$: corresponde à taxa fixa inicial, mesmo quando $x = 0$.
- Para 8 km: $C(8)=2,5 \cdot 8+6=26$. Logo, a corrida custa R\$ 26,00.

Como esboçar uma reta rapidamente

1. Identifique a e b na expressão $f(x)=ax+b$.
2. Marque o ponto $(0,b)$ no eixo y .
3. Calcule a raiz fazendo $f(x)=0$ e marque o ponto $(-b/a,0)$.
4. Ligue os dois pontos com uma reta.
5. Confira o comportamento: $a>0$ crescente; $a<0$ decrescente; $a=0$ constante.

Erros comuns para evitar

- Confundir a com b : lembre-se de que b é $f(0)$, portanto aparece no eixo y .
- Dizer que toda função afim é crescente: o sinal de a determina se ela cresce ou decresce.
- Encontrar a raiz trocando o sinal sem dividir por a : use sempre $ax+b=0 \rightarrow x=-b/a$.

5. Função quadrática (função polinomial do 2º grau)

A função quadrática é toda função que pode ser escrita na forma $f(x)=ax^2+bx+c$, com a , b e c reais e $a \neq 0$. Seu gráfico é uma parábola.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a \neq 0$$

Papel dos coeficientes

- a — determina a concavidade e influencia a abertura da parábola. Se $a > 0$, a concavidade é para cima; se $a < 0$, para baixo.
- b — participa da posição do eixo de simetria e das coordenadas do vértice.
- c — é o valor $f(0)$, portanto representa o ponto $(0, c)$, onde a parábola intercepta o eixo y .

Concavidade

$a > 0$	Parábola “abre” para cima • vértice é ponto de mínimo
$a < 0$	Parábola “abre” para baixo • vértice é ponto de máximo

Zeros ou raízes da função quadrática

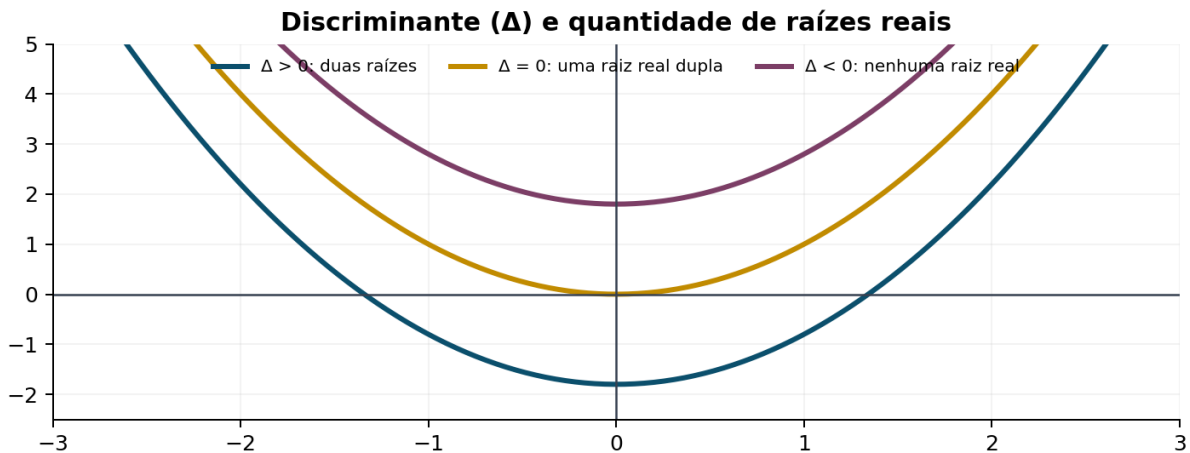
As raízes são os valores de x para os quais $f(x)=0$. Elas correspondem aos pontos em que a parábola intercepta o eixo x . Para encontrá-las, resolvemos a equação $ax^2+bx+c=0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{e} \quad x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a$$

Fórmula de Bhaskara

6. Discriminante (Δ) e vértice da parábola

O que o valor de Δ informa?



- $\Delta > 0$: existem duas raízes reais diferentes; a parábola corta o eixo x em dois pontos.
- $\Delta = 0$: existe uma raiz real dupla; a parábola toca o eixo x em um único ponto.
- $\Delta < 0$: não existem raízes reais; a parábola não intercepta o eixo x.

Vértice

O vértice é o ponto de máximo ou mínimo da parábola e fica sobre o eixo de simetria. Suas coordenadas podem ser calculadas pelas fórmulas:

$$x_v = -b / 2a \quad \text{e} \quad y_v = -\Delta / 4a$$

$$V = (x_v, y_v)$$

INTERPRETAÇÃO

Se $a > 0$, o vértice fornece o menor valor da função. Se $a < 0$, fornece o maior valor da função.

Passo a passo para estudar uma função quadrática

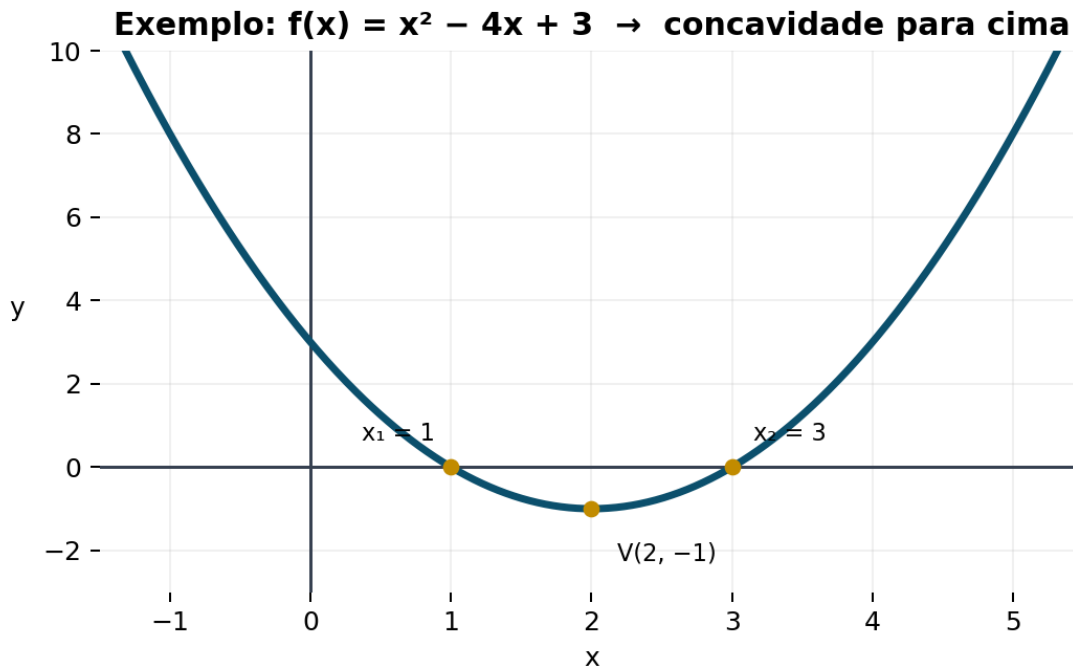
1. Identifique a, b e c.
2. Observe o sinal de a para determinar a concavidade.
3. Calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.
4. Encontre as raízes, quando existirem.
5. Calcule o vértice $V(x_v, y_v)$.
6. Marque também o ponto (0, c) e faça o esboço da parábola.

7. Gráficos da função quadrática — exemplos

Exemplo 1 — concavidade para cima

Considere $f(x)=x^2-4x+3$. Temos $a=1$, $b=-4$ e $c=3$.

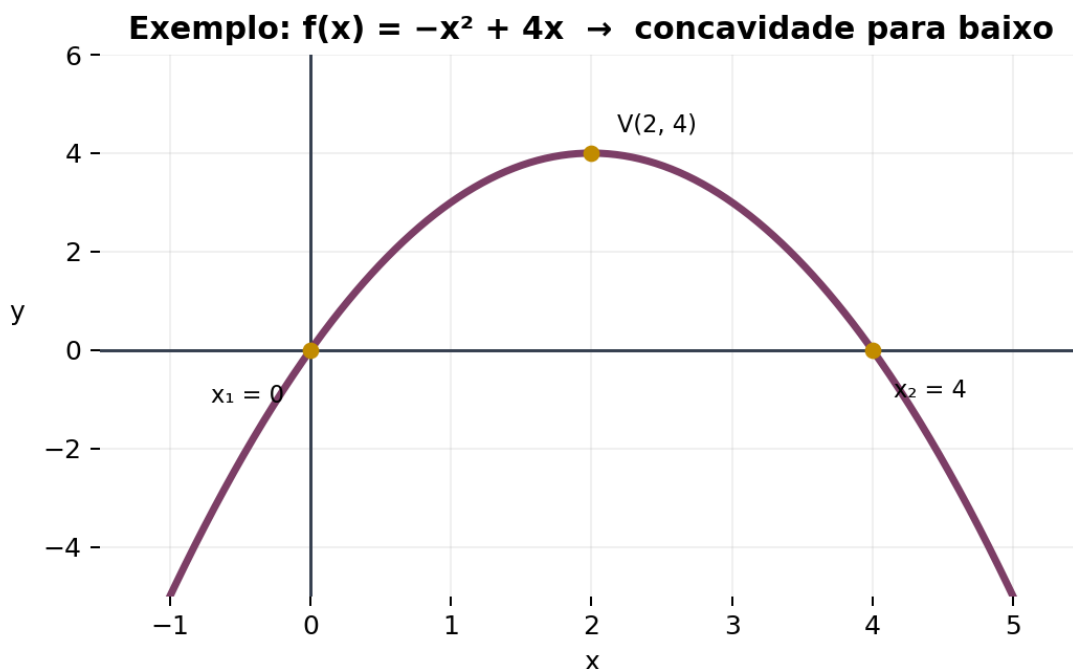
- $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4$.
- Raízes: $x=(4\pm2)/2 \rightarrow x_1=1$ e $x_2=3$.
- Vértice: $x_v=4/2=2$ e $y_v=f(2)=-1 \rightarrow V(2,-1)$.



Exemplo 2 — concavidade para baixo

Considere $f(x)=-x^2+4x$. Temos $a=-1$, $b=4$ e $c=0$.

- $\Delta=4^2-4\cdot(-1)\cdot0=16$.
- Raízes: $x=0$ e $x=4$.
- Vértice: $x_v=-4/[2\cdot(-1)]=2$ e $y_v=f(2)=4 \rightarrow V(2,4)$.



8. Aplicação da função quadrática

EXEMPLO DE MÁXIMO

A altura de um objeto, em metros, pode ser representada por $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$, em que t é o tempo em segundos. Como $a = -5 < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e o vértice representa a altura máxima.

- Tempo em que ocorre a altura máxima: $t_v = -20/[2 \cdot (-5)] = 2$ s.
- Altura máxima: $h(2) = -5 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 1 = 21$ m.

9. Comparando função afim e função quadrática

Característica	Função afim	Função quadrática
Forma geral	$f(x) = ax + b$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Condição principal	$a \neq 0$ (1º grau)	$a \neq 0$ (2º grau)
Gráfico	Reta	Parábola
Número máximo de raízes reais	1	2
Ponto importante	Interceptos / raiz	Vértice / raízes / concavidade
Comportamento	Crescente ou decrescente	Possui máximo ou mínimo

Checklist de revisão

- ☐ Consigo identificar os coeficientes a , b e c ?
- ☐ Sei dizer se uma reta é crescente ou decrescente olhando o sinal de a ?
- ☐ Sei calcular a raiz de uma função afim?
- ☐ Sei identificar a concavidade de uma parábola?
- ☐ Sei calcular Δ , as raízes e o vértice de uma função quadrática?
- ☐ Consigo relacionar fórmulas, pontos e comportamento no gráfico?

10. Exercícios rápidos de fixação

Resolva no caderno. Use os gráficos e os quadros deste material como apoio.

1. Na função $f(x)=3x-6$, identifique a e b e diga se a função é crescente ou decrescente.
2. Encontre a raiz da função $f(x)=-2x+8$.
3. Para $f(x)=4x+2$, determine $f(0)$, $f(1)$ e $f(-1)$.
4. Esboce o gráfico de $f(x)=x-2$ usando o intercepto em y e a raiz.
5. Na função $f(x)=2x^2-3x+1$, identifique a , b e c e informe a concavidade.
6. Calcule o discriminante de $f(x)=x^2-6x+9$ e indique quantas raízes reais existem.
7. Encontre as raízes de $f(x)=x^2-5x+6$.
8. Determine o vértice da função $f(x)=x^2-4x+3$.
9. Explique, com suas palavras, a principal diferença entre o gráfico de uma função afim e o de uma função quadrática.

PARA GUARDAR

Função afim $\rightarrow$ reta $\rightarrow f(x)=ax+b$. Função quadrática $\rightarrow$ parábola $\rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$. Em ambos os casos, interpretar os coeficientes e os pontos de interseção ajuda a compreender o gráfico.

11. Gabarito comentado — resolução passo a passo

Confira cada resolução somente depois de tentar resolver os exercícios. O objetivo do gabarito é mostrar o raciocínio matemático, e não apenas a resposta final.

COMO USAR O GABARITO

Leia o enunciado, compare com sua tentativa e observe em qual etapa o procedimento pode ser melhorado. Nas funções, identifique primeiro os coeficientes e só depois aplique as fórmulas.

Exercício 1 — Coeficientes e comportamento da função afim

1º passo: Compare $f(x)=3x-6$ com a forma geral $f(x)=ax+b$.

2º passo: O número que multiplica x é $a=3$. O termo independente é $b=-6$.

3º passo: Como $a=3>0$, a reta é crescente: quando x aumenta, $f(x)$ também aumenta.

Resposta: $a=3$, $b=-6$ e a função é crescente.

Exercício 2 — Raiz de uma função afim

1º passo: A raiz ocorre quando $f(x)=0$. Portanto: $-2x+8=0$.

2º passo: Isole o termo com x : $-2x=-8$.

3º passo: Divida os dois lados por -2 : $x=(-8)/(-2)=4$.

Verificação: $f(4)=-2\cdot 4+8=-8+8=0$.

Resposta: A raiz é $x=4$; o gráfico intercepta o eixo x no ponto $(4,0)$.

Exercício 3 — Cálculo de valores da função

Para $x=0$: $f(0)=4\cdot 0+2=2$.

Para $x=1$: $f(1)=4\cdot 1+2=6$.

Para $x=-1$: $f(-1)=4\cdot (-1)+2=-4+2=-2$.

Resposta: $f(0)=2$, $f(1)=6$ e $f(-1)=-2$.

Exercício 4 — Esboço do gráfico de $f(x)=x-2$

1º passo — intercepto em y : Faça $x=0$: $f(0)=0-2=-2$. Assim, marque o ponto $(0,-2)$.

2º passo — raiz: Faça $f(x)=0$: $x-2=0 \rightarrow x=2$. Assim, marque o ponto $(2,0)$.

3º passo — traçado: Ligue os pontos $(0,-2)$ e $(2,0)$ por uma reta. Como $a=1>0$, a reta é crescente.

x	$f(x)=x-2$
0	-2
2	0

Resposta: O gráfico é a reta crescente que passa por $(0,-2)$ e $(2,0)$.

Exercício 5 — Coeficientes e concavidade da função quadrática

1º passo: Compare $f(x)=2x^2-3x+1$ com a forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

2º passo: Identifique os coeficientes: $a=2$, $b=-3$ e $c=1$.

3º passo: A concavidade depende do sinal de a . Como $a=2>0$, a parábola abre para cima.

Resposta: $a=2$, $b=-3$, $c=1$; concavidade voltada para cima.

Exercício 6 — Discriminante e quantidade de raízes

1º passo: Em $f(x)=x^2-6x+9$, temos $a=1$, $b=-6$ e $c=9$.

2º passo: Use $\Delta=b^2-4ac$.

3º passo: $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9=36-36=0$.

Interpretação: Quando $\Delta=0$, existe uma única raiz real, chamada raiz dupla; a parábola toca o eixo x em um ponto.

Resposta: $\Delta=0$; existe 1 raiz real dupla. Neste caso, $x=3$.

Exercício 7 — Raízes da função quadrática

1º passo: Para $f(x)=x^2-5x+6$, identifique $a=1$, $b=-5$ e $c=6$.

2º passo: Calcule Δ : $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$.

3º passo: Aplique Bhaskara: $x=[-b\pm\sqrt{\Delta}]/(2a)=[5\pm 1]/2$.

4º passo: $x_1=(5+1)/2=6/2=3$ e $x_2=(5-1)/2=4/2=2$.

Verificação: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, confirmando as raízes 2 e 3.

Resposta: As raízes são $x_1=2$ e $x_2=3$.

Exercício 8 — Vértice da parábola

1º passo: Para $f(x)=x^2-4x+3$, temos $a=1$, $b=-4$ e $c=3$.

2º passo — coordenada x : $x_v=-b/(2a)=-(-4)/(2\cdot 1)=4/2=2$.

3º passo — coordenada y : Substitua $x=2$ na função: $y_v=f(2)=2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1$.

Interpretação: Como $a=1>0$, o vértice é um ponto de mínimo da parábola.

Resposta: $V=(2,-1)$.

Exercício 9 — Diferença entre os gráficos

Função afim: tem forma $f(x)=ax+b$ e seu gráfico é uma reta. Sua taxa de variação é constante e depende do coeficiente a .

Função quadrática: tem forma $f(x)=ax^2+bx+c$ e seu gráfico é uma parábola, com concavidade para cima ou para baixo e um vértice de máximo ou mínimo.

Comparação: a reta não possui vértice; a parábola possui eixo de simetria e vértice. Uma função afim tem no máximo uma raiz, enquanto uma quadrática pode ter duas, uma ou nenhuma raiz real.

Resposta: Função afim $\rightarrow$ reta; função quadrática $\rightarrow$ parábola. Os formatos e comportamentos dos gráficos são diferentes.